Licence E.E.A.
Transformée de Laplace

1 Application de la définition de la transformée de Laplace

Calculer les transformées de Laplace des trois fonctions suivantes :

1. $f_1(t) = 1.u(t)$,
2. $f_2(t) = t.u(t)$,
3. $f_3(t) = e^{-at}.u(t)$.

2 Applications de la propriétés de linéarité

À l'aide du théorème de linéarité, calculez les transformées de Laplace des trois fonctions suivantes :

1. $f_4(t) = \sin(\omega t).u(t)$,
2. $f_5(t) = \cos(\omega t).u(t)$,
3. $f_6(t) = (4.e^{-5t} + \sin(4t) + 3\cos(2t)).u(t)$.

On rappelle que :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \text{ et } \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

3 Application de la propriétés de linéarité (bis)

À l'aide du théorème de la linéarité calculez la transformée de Laplace de la fonction "Impulsion". Pour cela vous décomposerez $f_7(t)$ en une somme de deux fonctions que vous expliciterez.

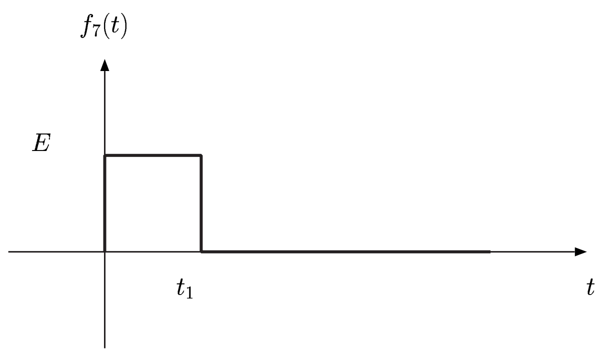

FIG. 1 – Fonction Impulsion

4 Application de la propriété de translation

Montrer que :

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\cos\left(\Omega t\right)\right] = \frac{p-\alpha}{\left(p-\alpha\right)^2+\Omega^2}$$

5 Application de la propriété de changement d'échelle

Montrer que :

$$\mathcal{L}f\left(at\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

6 Application de la transformée d'une dérivée

À partie du théorème de la rtansformée d'une dérivée, montrer que :

1. $\mathcal{L}\left[1\right] = \frac{1}{p}$
2. $\mathcal{L}\left[t\right] = \frac{1}{p^2}$
3. $\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$

7 Application aux fonctions périodiques

Donnez la transformée de Laplace de la fonction suivante :

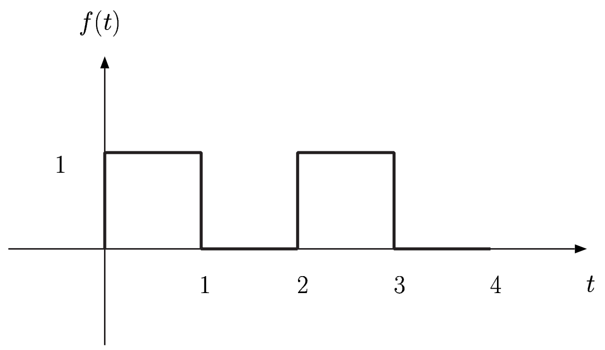

FIG. 2 – Signal Carré

8 Application au calcul de la transformée inverse de Laplace

1. $F_1\left(p\right) = \frac{3p-1}{(p-1)(p^2+1)}$
2. $F_2\left(p\right) = \frac{2p^2+3p+3}{p^3+6p^2+11p+6}$
3. $F_3\left(p\right) = \frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^2}$
4. $F_4\left(p\right) = \frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}$